Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Чисельні методи в інформатиці

**Лабораторна робота № 2**

Знаходження розв’язку СЛР. Знаходження оберненої матриці. Знаходження детермінанту матриці.

Виконав:

студент другого курсу

групи К-26

факультету кібернетики

Київського національного

університету імені

Тараса Шевченка

Кожухівський Віталій

Київ, 2014

Зміст

1. Постановка задачі
2. Теоретичні відомості
3. Розрахунки
4. Відповідь
5. Висновки

Постановка задачі

Знайти корені СЛР. Коефіцієнти СЛР задані матрицею Гільберта певного порядку.  
Для тієї ж матиці знайти обернену, число її обумовленості, детермінант.

Теоретичні відомості

10. Метод Гаусса.

Запишемо рівняння (1) у вигляді

 (2)

де  − відомий вектор правих частин.

Перший крок методу Гаусса (інколи його називають методом виключення невідомих) полягає у виключенні невідомого  із усіх рівнянь, починаючи з другого, тобто в переході до системи

 (3)

де 



Наступний крок полягає у виключенні невідомого  в системі (3) з усіх рівнянь, починаючи з третього. Продовжуючи цей процес, отримаємо СЛАР з верхньою трикутною матрицею виду

 (4)

Коефіцієнти системи (4) обчислюються за формулами

 (5)

при умові .

Система (5) розв′язується за формулами:

,  . (6)

Перехід від задачі (2) до (4) називається прямим ходом методу Гаусса, а обчислення розв′язку за формулами (6) − зворотнім (оберненим) ходом.

Загальна кількість арифметичних операцій, які потрібно виконати для реалізації методу Гаусса має порядок

.

### 20.Метод Гаусса з вибором головного елементу

У випадку, коли ведучий елемент на *k*-му кроці , звичайний метод Гаусса використовувати не можна. В цьому випадку використовується метод Гаусса з вибором головного елементу. Тобто на кожному кроці виключається невідоме, коефіцієнт при якому є найбільшим за модулем. Головний елемент може вибиратися:

а) за рядком

;

в цьому випадку на кожному кроці необхідно проводити відповідну перенумерацію змінних.

б) За стовпчиком

;

тоді на кожному кроці проводиться відповідна перенумерація рівнянь.

в) за всією матрицею.

Найчастіше віддають перевагу алгоритму вибору головного елементу за стовпчиком.

Відзначимо також, що метод Гаусса з вибором головного елементу дає можливість дещо зменшити обчислювальну похибку алгоритму.

В матричному вигляді *k*-й крок методу Гаусса можна подати у вигляді

, (7)

де ,

а

 (8)

Тоді процес виключення Гаусса можна подати у вигляді

, (9)

де .

Відзначимо, що матриця  − верхня трикутна з одиничною головною діагоналлю. Тобто метод Гаусса базується на можливості розкладання матриці *А* на дві трикутні матриці.

***Теорема.*** *Нехай всі головні мінори матриці А відмінні від нуля. Тоді матрицю А можна подати у вигляді добутку*

*,* (10)

*де L − нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами, а U − верхня трикутна з одиничною діагоналлю.*

Відзначимо, що з формули (9) випливає

 (11)

Алгоритм вибору головного елементу можна записати у матричному вигляді за допомогою матриці перестановок.

***Елементарною матрицею перестановок *** називається матриця, що отримана з одиничної матриці перестановкою *k*-го та *l*-го рядків.

З даного означення випливає, що матриця  відрізняється від матриці *А* перестановкою *k*-го та *l*-го рядків ,а матриця  − перестановкою *k*-го та *l*-го стовпчиків. Тоді алгоритм прямого ходу методу Гаусса з вибором головного елементу за стовпчиком приме вигляд

, (12)

де  − матриця перестановок на *k*-му кроці.

### Обчислення визначника матриці.

Якщо під час реалізації методу Гаусса знайдено розклад , то

,

З формули (9) випливає, що

.

Для алгоритму методу Гаусса з вибором головного елементу за стовпчиком, будемо мати

 , де - загальна кількість перестановок.

В методі квадратного кореня . Тому

.

### Обчислення оберненої матриці.

Знаходження матриці, оберненої до матриці *А* еквівалентне розв′язанню матричного рівняння

 (17)

де *Е* − одинична матриця, а *X* − шукана матриця. Відзначимо, що система (17) розпадається на *n* незалежних систем рівнянь з однаковою матрицею *А*, але різними правими частинами. Ці системи мають вигляд

,

де , а у вектора  дорівнює одиниці *j*-та компонента, а всі інші дорівнюють нулю. Тоді, якщо ми один раз знайшли розвинення , то зворотній хід методу Гаусса зводиться до розв′язування СЛАР з трикутними матрицями

,

,

.

Загальна кількість арифметичних операцій, які потрібно виконати для знаходження *А*-1 методом Гауса .

Аналогічно знаходиться обернена матриця до симетричної матриці *А* методом квадратного кореня.

60.Метод прогонки

Метод прогонки застосовується для розв′язування СЛАР з трьох-діагональною матрицею. Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

, , (18)

Алгоритм розв'язування СЛАР (18) полягає в наступному:

1. за допомогою прямих прогоночних формул (зліва направо) знаходимо прогоночні коефіцієнти  та :

 ,

, (19)

де 

1. знаходимо уn за формулою

 (20)

1. значення *уі* знаходимо за наступними формулами

 (21)

Лема. Нехай , та виконуються умови

 (22)

*причому, в* (22) *хоча б при одному i виконується строга нерівність, тоді будуть мати місце оцінки*

  (23)

Відзначимо, що оцінка (23) є умовою стійкості методу прогонки. Загальна кількість математичних операцій, які потрібно виконати для реалізації методу прогонки має порядок .

60. Число обумовленості матриці.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

 (24)

з квадратною невиродженою матрицею *А.*

При розв′язуванні СЛАР (24) із скінченною розрядністю замість вектора **отримаємо наближений розв′язок , який можна розглянути, як точний розв′язок збуреної системи

, (32)

де матриця  та вектор  досить малі. Тоді для відносної похибки вірна оцінка

, (33)

де виличина *cond(A)* визначається за формулою

 (34)

та називається числом обумовленності матриці *А*.

З формули (33) видно, що число обумовленості відіграє важливу роль для оцінки того, наскільки отриманий розв′язок  відрізняється від точного розв′язку СЛАР (24).

Якщо число *cond(A)* досить велике, то говорять, що матриця *А* погано обумовлена.

Відзначимо основні властивості числа обумовленості:

1. *cond(A)*.
2. Нехай *Р*-матриця перестановок, тоді *cond(P)=1*, зокрема *cond(Е)=1*.
3. *cond(**)=cond(A)*, де деяка стала.
4. Нехай *D* – діагональна матриця, тоді

*cond(D)*.

1. 
2. .
3. Нехай , тоді .
4. Метод Якобі. Припустимо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці  - . Якщо деякі , то перестановкою рядків та/або стовпчиків матриці цього можна досягти. Розділивши *i*–те рівняння на , отримаємо таку СЛАР
5. .
6. Задамо деяке початкове наближення . Наступні наближення обчислюємо за формулами
7.   . (2)
8. Метод збігається, тобто , якщо виконуються умови діагональної переваги матриці :
9.  .
10. Якщо ж виконується нерівність
11. , (3)
12. то має місце така оцінка точності
13. . (4)
14. Ітерації проводять поки не установлюється необхідна кількість цифр в компонентах розв‘язку або при виконанні умови . Вибір останньої умови пояснюється тим, що при такому виборі та для  маємо оцінку
15. .

Розрахунки

Візьмемо матрицю Гілберта 3–го порядку.

Візьмемо вектор вільних членів b:

Методом Гаусса отримуємо розв’язки х:

Легко переконатись, що дані корені дійсно є розв’язками системи із заданими коефіцієнтами.  
Обернена:

Неважко переконатись, що ця матриця дійсно є оберненою до заданої.

Число обумовленості:

.

Визначник:

Для збіжності методу Якобі потрібна діагональна перевага у матриці, яка відсутня у матриці Гільберта. Тому візьмемо наступну матрицю:

Вільні члени такі ж. Отримуємо розв’язок СЛР:

Метод збігся та знайшов розв’язки, які, як можна переконатись, дійсно є розв’язками СЛР.

Відповідь

Завдяки діагональній перевазі матриці, методЯкобі збігся і знайшов розв’язки СЛР із певною точністю.

Висновки

Врахувавши усі умови збіжності алгоритм Якобі збігся.